01.02.2022

Adı Soyadı:

Numarası:

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) Bir tam diferansiyel denklem yazınız ve genel çözümünü bulunuz.

2) $y' = \dfrac{y^2 - 3x}{xy}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3) $x^2 - cy^2 = 1$ eğri ailesinin dik yörüngelerini bulunuz.

4) $y = 2 - (x-c)^2$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

5) $y'(y'-x) + y - 1 = 0$ diferansiyel denklemi verilsin. Aşağıdakileri bulunuz.

a) genel çözümünü **b)** $y(0) = 0$ özel çözümünü **c)** tekil çözümünü

6) $y' = 2x\sqrt{y-1}$, $y(1) = 2$ başlangıç değer probleminin çözümünün varlık-tekliğini inceleyiniz.

Not: **Sadece 4 soru cevaplandırınız.** Süre: 90 dakikadır. Başarılar.

Doç. Dr. Fatma Hıra

Cevaplar

1) $u(x,y) = 2xy - 5x^2 + e^y \Rightarrow du = (2y-10x)dx + (2x+e^y)dy$

$\Rightarrow (2y-10x)dx + (2x+e^y)dy = 0$ tam dif

$u(x,y) = x+y \Rightarrow du = dx+dy \Rightarrow dx+dy=0$ tam dif

$u(x,y) = 2xy \Rightarrow du = 2ydx + 2xdy \Rightarrow 2ydx + 2xdy = 0$ tam dif.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ için $M_y = N_x$ ise denklem tam dif denklemdir.

$\underbrace{2y}_{M}dx + \underbrace{2x}_{N}dy = 0$ için $M_y = 2 = N_x$

$\int 2ydx + \int 2xdy = \int 0 \Rightarrow 2xy + \cancel{2xy} = c \Rightarrow 2xy = c$

veya $2ydx + 2xdy = 0 \Rightarrow \int d(2xy) = \int d(c) \Rightarrow 2xy = c$ genel çözüm

2) $y' = \dfrac{y^2-3x}{xy} \Rightarrow y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{y} \Rightarrow y' - \dfrac{1}{x}y = -3y^{-1}$ olup $n=-1$

için ($y' + P(x)y = Q(x)y^n$ formundadır) Bernoulli denklemidir

$u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} \Rightarrow u = y^2$ dönüşümü yapılırsa $u' = 2yy'$ olup

denklem $2y$ ile çarpılırsa

$2yy' - \dfrac{2}{x}y^2 = -6 \Rightarrow u' - \dfrac{2}{x}u = -6$ lineer denklemine indirgenir.

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ olmak üzere lineer denklemin çözümü

$u.\dfrac{1}{x^2} = \int -6.\dfrac{1}{x^2}dx + c \Rightarrow \dfrac{u}{x^2} = \dfrac{6}{x} + c \Rightarrow u = 6x + cx^2$ dur.

$u = y^2 \Rightarrow$ $y^2 = 6x + cx^2$ genel çözümü bulunur.

③ $x^2 - cy^2 = 1$

1. adımı: dif denk. bulalım $2x - 2cyy' = 0 \Rightarrow c = \frac{x}{yy'} \Rightarrow x^2 - \frac{x}{yy'} \cdot y^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 - \frac{xy}{y'} = 1$

2. adımı: dik yörünge için $y' \to -\frac{1}{y'}$ yazılırsa dik yörünge denklemi bulunur

$x^2 - \frac{xy}{\left(-\frac{1}{y'}\right)} = 1 \Rightarrow x^2 + xyy' = 1$ dik yörünge denklemi bulunur

3. adımı: Denklem çözülürse $xyy' = 1 - x^2 \Rightarrow y\,dy = \frac{1-x^2}{x}\,dx$ değişken

karşı ayrılabilen denklem her iki tarafın integrali alınırsa

$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + a$ dik yörüngeleri bulunur.

④ $y = 2 - (x-c)^2 \Rightarrow g(x,y,c) = y - 2 + (x-c)^2 = 0$

$\frac{\partial g}{\partial c} = 2(x-c)\cdot(-1) = 0$ $\Rightarrow x - c = 0$

$y = 2$ c-tekil yeri

• $y=2$ tekil çözüm mü yani eğri ailesine karşılık gelen dif denk. sağlar mı?

$y = 2 - (x-c)^2 \Rightarrow y' = -2(x-c) \Rightarrow x - c = \frac{-y'}{2} \Rightarrow y = 2 - \left(-\frac{y'}{2}\right)^2$

$y = 2 + \frac{(y')^2}{4}$ dif denk.

$y = 2$ için $y' = 0$ olup bunlar denkleminde yerlerine yazılırsa

$2 = 2 + \frac{(0)^2}{4} \Rightarrow 2 = 2$ sağlanır. O halde $y = 2$ tekil çözümdür.

• $y = 2$ için $y = 2 - (x-c)^2 \Rightarrow 2 = 2 - (x-c)^2 \Rightarrow (x-c)^2 = 0 \Rightarrow c = x$

çift katlı kök olduğundan $y=2$ doğrusu parabol ailesinin zarfıdır.

⑤ $y'(y'-x) + y - 1 = 0 \Rightarrow y' = p$ için $p^2 - xp + y - 1 = 0 \Rightarrow y = xp + \underbrace{1-p^2}_{f(p)}$

Clairaut denklemidir.

ⓐ $p = c$ için $y = xc + 1 - c^2$ genel çözüm

ⓑ $y(0) = 0$ koşulu için $0 = 0\cdot c + 1 - c^2 \Rightarrow 1 - c^2 = 0 \Rightarrow c = 1,\ c = -1$

olup $y = x$ ve $y = -x$ istenen özel çözümlerdir

ⓒ $x = -f'(p)$, $y = -pf'(p) + f(p)$ tekil çözümü veriyor $f(p) = 1 - p^2 \Rightarrow f'(p) = -2p$

$x = 2p \Rightarrow p = \frac{x}{2}$

$y = 2p^2 + 1 - p^2 = p^2 + 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{x^2}{2}$

$f''(p) = -2 \neq 0$ olduğundan $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ tekil çözümdür.

⑥ $y' = 2x\sqrt{y-1}$, $y(1) = 2$

fonksiyonu $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$ için sürekli olacağından

$f(x,y) = 2x\sqrt{y-1}$ bir D kapalı bölgesinde de sürekli olur.

(1,2) noktasını içeren

başlangıç koşulundan fonksiyonu $y > 1$ için sürekli olacağından aynı D bölgesinde sürekli

$f_y = \frac{x}{\sqrt{y-1}}$ olur. f ve f_y D de sürekli olduğundan varlık teklik teoremine göre problemin bir tek çözümü vardır.